Αναλυτική Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα

1ο πακέτο ασκήσεων: Διανυσματικός Λογισμός και Αναλυτική Γεωμετρία

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (2026-2027)

Να λύσετε όσες περισσότερες από τις παρακάτω ασκήσεις μπορείτε. Οι απαντήσεις σας θα πρέπει να είναι πλήρεις και δικαιολογημένες.

Άσκηση 1. Να εξηγήσετε με λίγα λόγια:

i. Τη διαφορά ανάμεσα στις έννοιες του εφαρμοστού και του ελεύθερου διανύσματος.

ii. Τι ονομάζουμε ορθογώνιο και τι ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, γιατί προτιμούμε τα ορθοκανονικά συστήματα και με ποιόν τρόπο μετασχηματίζουμε τυχαία συστήματα σε ορθοκανονικά στο επίπεδο. Με τη μέθοδο που μόλις περιγράψατε, να μετασχηματίσετε το σύστημα συντεταγμένων $\{\overrightarrow{u} = (1,2), \overrightarrow{v} = (2,1)\}$ σε ορθοκανονικό.

iii. Ποιοί είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε μια ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ και πώς περνάμε από τον ένα στον άλλο.

iv. Ποιοί είναι οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να περιγράψουμε ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ και πώς περνάμε από τον ένα στον άλλο.

Άσκηση 2. Να αιτιολογήσετε **πλήρως** αν οι παρακάτω προτάσεις είναι **σωστές** ή **λάθος** με *απόδειξη* ή *αντιπαράδειγμα*.

i. Αν $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in \mathcal{D}^3$ με $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$, τότε $\left(\overrightarrow{\beta} - \mathrm{pr}_{\overrightarrow{\alpha}}(\overrightarrow{\beta})\right) \perp \overrightarrow{\alpha}$.

ii. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{\alpha} + l\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{w} = l\overrightarrow{\alpha} - k\overrightarrow{\beta}$ όπου $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in \mathcal{D}^3$ και $k, l \in \mathbb{R}$ με $k^2 + l^2 = 1$ ισχύει ότι $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}\|$.

iii. $\|\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}\|^2 + \langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \rangle^2 = \|\overrightarrow{\alpha}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{\beta}\|^2$ για οποιαδήποτε $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in \mathcal{D}^3$.

iv. Υπάρχουν διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε

$$|\langle \overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \rangle| = 0.$$

v. Για το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\beta} \times \overrightarrow{\gamma} + \overrightarrow{\gamma} \times \overrightarrow{\alpha}$, όπου $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma} \in \mathcal{D}^3$, ισχύει ότι

$$\langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{u} \rangle.$$

vi. Υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε τα διανύσματα

$$\overrightarrow{\alpha} = (1, k, 2), \quad \overrightarrow{\beta} = (2, 1, k), \quad \overrightarrow{\gamma} = (k, 2, 1)$$

να είναι συνεπίπεδα.

vii. Υπάρχουν μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{D}^3$ τέτοια ώστε

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{και} \quad \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \frac{1}{2}.$$

viii. Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by + c = 0$ με $a \neq 0$ παριστάνει ευθεία στο επίπεδο.

ix. Κάθε ευθεία στο επίπεδο έχει αναλυτική εξίσωση της μορφής $ax + by + c = 0$ με $a \neq 0$.

x. Εάν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στον $\mathbb{R}^3$ δεν έχουν κοινά σημεία τότε είναι παράλληλες.

xi. Εάν για τρεις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στον $\mathbb{R}^3$ ισχύει ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$ και $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$ τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Άσκηση 3. Να αποδείξετε ότι

$$\mathrm{pr}_{\overrightarrow{\beta}}(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) = \mathrm{pr}_{\overrightarrow{\beta}}(\overrightarrow{a_1}) + \mathrm{pr}_{\overrightarrow{\beta}}(\overrightarrow{a_2}) \text{ και } \mathrm{pr}_{\overrightarrow{\beta}}(\lambda\overrightarrow{\alpha}) = \lambda\,\mathrm{pr}_{\overrightarrow{\beta}}(\overrightarrow{\alpha})$$

για οποιαδήποτε $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in \mathcal{D}^3$ με $\overrightarrow{\beta} \neq \overrightarrow{0}$, και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4. Εάν $\overrightarrow{\alpha} = (1, 0, -1), \overrightarrow{\beta} = (0, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$, να βρείτε όλα τα διανύσματα $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ τα οποία είναι κάθετα στα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ και έχουν μέτρο $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{6}$.

Άσκηση 5. Να βρείτε τον τύπο του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta} \in \mathbb{R}^3$ ως προς σύστημα συντεταγμένων $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ για το οποίο ισχύει ότι

$$\|\overrightarrow{u}\| = 2, \quad \|\overrightarrow{v}\| = \frac{3}{2}, \quad \|\overrightarrow{w}\| = 1,$$

και

$$\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})} = \frac{\pi}{6}, \quad \widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})} = \frac{\pi}{4}.$$

Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha} = (1, 1, 2)$ και $\overrightarrow{\beta} = (3, 2, 2)$.

Άσκηση 6. Εάν $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\delta} \in \mathcal{D}^3$ τέτοια ώστε $\overrightarrow{\gamma} = 3\overrightarrow{\alpha} - 2\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{\alpha} + 4\overrightarrow{\beta}$ και $\|\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}\| = \frac{2}{7}$, να υπολογίσετε το $\|\overrightarrow{\gamma} \times \overrightarrow{\delta}\|$.

Άσκηση 7. Στον χώρο $\mathbb{R}^3$ να βρεθουν:

i. Η αναλυτική και η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου Π_1 που διέρχεται από το $A(3, -1, 4)$ και είναι κάθετο στα επίπεδα $2x - 2y + z = 0$ και $2x + y - 2z - 5 = 0$.

ii. Η αναλυτική και οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας ε_1 που διέρχεται από το $B(2, 0, -1)$ και είναι παράλληλη στα επίπεδα $x + y - 2z + 3 = 0$ και $x - y - z = 0$.

iii. Η σχετική θέση της ευθείας ε_1 με το επίπεδο Π_1 και η προβολή της πάνω σε αυτό.

iv. Η αναλυτική και η διανυσματική εξίσωση του επιπέδου Π_2 που διέρχεται από το $\Gamma(3, 1, 2)$ και είναι παράλληλο στις ευθείες

$$x - 2 = y + 1 = \frac{z - 3}{-3} \quad \text{και} \quad \frac{2x + 1}{4} = \frac{y - 5}{-6} = \frac{z - 3}{2}.$$

v. Η απόσταση της ε_1 από την τομή των επιπέδων Π_1 και Π_2.

vi. Να βρείτε το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία

$$\varepsilon_k : \ \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{k} = \frac{z - 1}{-2}$$

να τέμνει την τομή των επιπέδων Π_1 και Π_2, καθώς και το σημείο τομής.

vii. Δίνεται η οικογένεια επιπέδων

$$\Sigma_\mu : \ (1 + 2\mu)x + (2 + \mu)y + (2 + \mu)z - 9(1 + \mu) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το Σ_μ περιέχει την τομή των Π_1 και Π_2. Στη συνέχεια να βρείτε το μ ώστε το Σ_μ να είναι παράλληλο στην ε_1.